文章编号：1000-8608(2022)02-0213-08

比率依赖的修正 Leslie-Gower 捕食-食饵模型正解存在性和唯一性

窦晓霞， 李海侠*

（宝鸡文理学院 数学与信息科学学院，陕西 宝鸡 721013）

摘要： 研究了一类基于比率依赖的修正 Leslie-Gower 捕食-食饵扩散模型. 首先利用不动点指数理论给出了正解的存在条件. 其次通过扰动理论结合不动点指数理论讨论了正解的唯一性和稳定性，得到了正解唯一且稳定的条件. 最后运用抛物方程的比较原理分析了系统的渐近行为. 研究结果表明，参数满足一定条件时，两物种能够共存，而且系统恰好存在唯一稳定的正解.

关键词： 捕食-食饵模型；不动点指数理论；扰动理论；唯一性；稳定性；渐近行为

中图分类号： O175.26　　**文献标识码：** A　　**doi：** 10.7511/dllgxb202202014

0 引 言

捕食-食饵模型是生态学与生物数学的一个重要研究课题，具有丰富的动力学行为，已成为生态领域研究的核心内容，受到了国内外数学家和生物学家的广泛关注. 生物模型中反应函数的引入提高了有实际背景生物模型的精确度，因此，生物学家和数学家建立并研究了具有不同反应函数的捕食-食饵模型. 这些研究包括经典的 Holling-Ⅱ型[1-5]、比率依赖型[6-7]、Beddington-DeAngelis 型[8]、Crowley-Martin 型[9-12]和 Ivlev 型[13-14]等反应函数. 现实中随着食饵数量的增加，食饵的防御能力也会提高，这对捕食者会起到抑制作用. 于是为了模拟这种抑制现象，Andrews 提出了 Holling-Ⅳ型反应函数. 文献[15]讨论了具有简化 Holling-Ⅳ型反应函数的捕食-食饵扩散模型，利用分歧理论得到了正分歧解的存在性和稳定性，并通过不动点指数理论给出了正解的存在性. 文献[16]考察了具有 Holling-Ⅳ型反应函数的捕食-食饵模型，讨论了稳态解的存在性和稳定性、倍周期分歧和 Neimark-Sacker 分歧的存在性和方向. 本文主要考虑一类基于比率依赖的简化 Holling-Ⅳ型反应函数的捕食-食饵扩散模型，运用反应扩散方程和非线性泛函分析等理论，通过考察食饵和捕食者的增长率以及捕食者的捕获率等因素的影响来研究该模型的动力学行为.

1 模型介绍

文献[17]在齐次 Neumann 边界条件下讨论了如下比率依赖的 Leslie-Gower 捕食-食饵模型：

$$\begin{cases} u_t = ru\left(1-\dfrac{u}{k}\right)-\dfrac{muv^2}{u^2+av^2}; & t>0 \\ v_t = bv\left(1-\dfrac{v}{u}\right); & t>0 \end{cases} \tag{1}$$

式中：u_t 和 v_t 分别表示食饵和捕食者在 t 时刻的浓度，r 和 b 分别是 u 和 v 的最大增长率，k 代表食饵的环境容纳量，m 表示捕食者的捕获率，a 表示半饱和常数. 作者研究了正解的有界性和持久性、平衡态解的稳定性和全局稳定性，以及 Hopf 分歧解的存在性和稳定性. 系统(1)中的 $\dfrac{v}{u}$ 是 Leslie-Gower 项[18-19]. 由于 Leslie-Gower 项可能

收稿日期： 2021-03-04； **修回日期：** 2022-01-02.

基金项目： 国家自然科学基金资助项目(61672021,11801013)；陕西省自然科学基础研究计划项目(2014JQ2-1003)；宝鸡市科技计划项目(2018JH-20)；宝鸡文理学院校级重点项目(ZK2546).

作者简介： 窦晓霞(1979-)，女，硕士，讲师，E-mail：douxiaoxia1979@163.com；李海侠*(1978-)，女，博士，副教授，硕士生导师，E-mail：xiami0820@163.com.

无界，从而失去经典函数的好性质，因此，为了更合理地模拟生物模型动力学行为，通常在其分母上加一正常数.

考虑到捕食者和食饵受空间非均匀分布的影响，本文在 Robin 边界条件下研究如下修正 Leslie-Gower 捕食-食饵扩散模型：

$$
\begin{cases}
u_t-\Delta u=ru\left(1-\dfrac{u}{k}\right)-\dfrac{muv^2}{u^2+av^2}; & x\in\Omega,t>0\\
v_t-\Delta v=bv\left(1-\dfrac{v}{u+c}\right); & x\in\Omega,t>0\\
\dfrac{\partial u}{\partial n}+u=\dfrac{\partial v}{\partial n}+v=0; & x\in\partial\Omega,t>0\\
u(x,0)=u_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0; & x\in\Omega\\
v(x,0)=v_0(x)\geqslant 0,\not\equiv 0; & x\in\Omega
\end{cases}
\tag{2}
$$

其中 Ω 是 $\boldsymbol{R}^N(N\geqslant 1)$ 中带有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，Δ 是 Laplacian 算子，n 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量. c 表示环境对捕食者的保护程度. 系统(2)中的参数 r、k、m、a、b、c 都是正常数，初值 $u_0(x)$、$v_0(x)$ 是连续函数. 系统(2)中的 $\dfrac{uv}{u^2+av^2}$ 是基于比率的简化 Holling-Ⅳ 型反应函数. $\dfrac{v}{u+c}$ 称为修正 Leslie-Gower 项. 目前很多学者对具有修正 Leslie-Gower 项的捕食-食饵模型进行了研究. 如文献[3, 8-9, 11, 16, 20]和[2, 10, 12]分别在 Neumann 和 Dirichlet 边界条件下考察了具有修正 Leslie-Gower 项的捕食-食饵模型的动力学性质，其中文献[2]分析了具有 Holling-Ⅱ 反应函数的捕食-食饵模型正解的存在性、唯一性和稳定性；文献[10, 12]研究了具有 Crowley-Martin 型反应函数的捕食-食饵模型正解的存在性、唯一性、稳定性和多重性.

从生物学的现实意义上来讲，物种是否能够共存是对生物模型最重要的研究内容之一. 因此本文重点讨论系统(2)对应的平衡态系统

$$
\begin{cases}
-\Delta u=ru\left(1-\dfrac{u}{k}\right)-\dfrac{muv^2}{u^2+av^2}; & x\in\Omega\\
-\Delta v=bv\left(1-\dfrac{v}{u+c}\right); & x\in\Omega\\
\dfrac{\partial u}{\partial n}+u=\dfrac{\partial v}{\partial n}+v=0; & x\in\partial\Omega
\end{cases}
\tag{3}
$$

正解的存在性、唯一性和稳定性. 然而(0,0)点是系统(3)的奇异点，导致系统(3)在(0,0)点指数的计算增加了难度，也就是说比率依赖项 $\dfrac{muv}{u^2+av^2}$ 的引入使得系统的研究变得复杂，所以目前在齐次 Robin 边界条件下对比率依赖的修正 Leslie-Gower 捕食-食饵扩散模型的研究很少见.

为了得到重要的结论，给出本文需要的预备知识.

令 $\lambda_1(p)$ 是特征值问题

$$
\begin{cases}
-\Delta\psi+p(x)\psi=\lambda\psi; & x\in\Omega\\
\dfrac{\partial\psi}{\partial n}+\psi=0; & x\in\partial\Omega
\end{cases}
$$

的主特征值，这里 $p(x)\in C(\bar{\Omega})$，则 $\lambda_1(p)$ 连续依赖 p，$\lambda_1(p)$ 是简单的. 而且，若 $p_1\leqslant p_2$，$p_1\not\equiv p_2$，则 $\lambda_1(p_1)<\lambda_1(p_2)$. 为了简单起见，记 $\lambda_1(0)$ 为 λ_1，相应于 λ_1 的主特征函数为 φ_1.

易知当 $r>\lambda_1$ 时，如下方程

$$
\begin{cases}
-\Delta u=u(r-au); & x\in\Omega\\
\dfrac{\partial u}{\partial n}+u=0; & x\in\partial\Omega
\end{cases}
\tag{4}
$$

存在唯一正解，记为 $\theta_{(r,a)}$. 而且，$\theta_{(r,a)}<r/a$.

2 正解的存在性

利用不动点指数理论讨论系统(3)正解的存在性.

易知：当 $r>\lambda_1$ 时，系统(3)存在半平凡解 $(\theta_{(r,r/k)},0)$；当 $b>\lambda_1$ 时，系统(3)存在半平凡解 $(0,\theta_{(b,b/c)})$. 简单起见，记 $\theta_{(r,r/k)}$ 为 u^*，$\theta_{(b,b/c)}$ 为 v^*.

首先，运用特征值的比较原理以及最值原理易得正解存在的必要条件和先验估计.

引理 1 若系统(3)存在正解(u,v)，则 $r>\lambda_1$，$b>\lambda_1$.

证明 从系统(3)的第一个方程和特征值的比较原理有 $0=\lambda_1\left(-r+\dfrac{ru}{k}+\dfrac{mv^2}{u^2+av^2}\right)>\lambda_1(-r)$. 因此，$r>\lambda_1$. 同理可得 $b>\lambda_1$. □

引理 2 若系统(3)有非负解$(u(x),v(x))$

且 $u\not\equiv 0, v\not\equiv 0$，则 $0<u(x)\leqslant u^*<k, v^*\leqslant v(x)<k+c, x\in\overline{\Omega}$. 而且，若 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}$，则 $u>\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)}$.

证明　首先由最值原理可得 $u(x)>0$, $v(x)>0$. 因为 $-\Delta u\leqslant ru\left(1-\frac{u}{k}\right)$，所以根据引理1、上下解方法和 u^* 的唯一性可得 $u(x)\leqslant u^*$. 于是 $u(x)\leqslant u^*<k$. 类似得 $v^*\leqslant v(x)<k+c$ 以及 $u>\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)}$.

□

令 $f(u,v)=ru\left(1-\frac{u}{k}\right)-\frac{muv^2}{u^2+av^2}$, $g(u,v)=bv\left(1-\frac{v}{u+c}\right)$，显然 $(0,0)$ 是系统(3)的奇异点，应用 Kuang 等[6]的思想，假设 $f(0,0)=0$，更确切地说，因为 $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\frac{uv^2}{u^2+av^2}=0$，所以可以将 $\frac{uv^2}{u^2+av^2}$ 延拓到 $\{(u,v): u\geqslant 0, v\geqslant 0\}$ 使得 $(0,0)$ 是系统(3)的平凡解.

为了计算不动点指数，引入以下记号：

$E=C_B^1(\overline{\Omega})\times C_B^1(\overline{\Omega})$，其中 $C_B^1(\overline{\Omega})=\left\{w\in C^1(\overline{\Omega}): \frac{\partial w}{\partial n}+w=0, x\in\partial\Omega\right\}$; $D=\{(u,v)\in E: u\leqslant k+1, v\leqslant k+c+1\}$; $W=P_1\times P_2$，其中 $P_i=\{w\in C_B^1(\overline{\Omega}): w(x)\geqslant 0, x\in\overline{\Omega}\}$, $i=1,2$; $D'=(\mathrm{int}\ D)\cap W$.

下面在 $\{(u,v): u\geqslant 0, v\geqslant 0\}$ 上定义函数

$$\hat{f}(u,v)=\begin{cases}u\left(r-\frac{ru}{k}-\frac{mv^2}{u^2+av^2}\right); & (u,v)\neq(0,0)\\ 0; & (u,v)=(0,0)\end{cases}$$

$$\hat{g}(u,v)=g(u,v)$$

定义算子 $\boldsymbol{F}: D'\to W$ 为

$$\boldsymbol{F}(u,v)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix}\hat{f}(u,v)+Mu\\ \hat{g}(u,v)+Mv\end{pmatrix}$$

这里 M 是满足 $M>\max\{m/a, b(k+c)/c\}$ 的充分大的常数. 于是 $\boldsymbol{F}$ 是紧且连续可微算子. 显然系统(3)存在非负解当且仅当算子 $\boldsymbol{F}$ 在 D 中存在不动点.

接下来运用文献[21]中的定理1给出算子 $\boldsymbol{F}$ 在平凡解和半平凡解处的不动点指数.

引理3　设 $r>\lambda_1, b>\lambda_1$，则

(i) $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F}, D')=1$;

(ii) 若 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}, b>\lambda_1$，则 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F},(0,0))=0$;

(iii) $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F},(u^*,0))=0$;

(iv) 若 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}$，则 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F},(0,v^*))=0$; 若 $r<\lambda_1+\frac{m}{a}$，则 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F},(0,v^*))=1$.

由于引理3中(ii)的证明较复杂，所以在此只证明(ii). 为了计算 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F},(0,0))$，再定义函数

$$\bar{f}(\varepsilon,u,v)=\begin{cases}u\left(r-\frac{ru}{k}-\frac{mv^2}{\varepsilon+u^2+av^2}\right); \\ \qquad (u,v)\neq(0,0)\\ 0;\ (u,v)=(0,0)\end{cases}$$

$$\bar{g}(\varepsilon,u,v)=\hat{g}(u,v)$$

以及算子 $\boldsymbol{F}_\varepsilon$ 为

$$\boldsymbol{F}_\varepsilon(u,v)=(-\Delta+M)^{-1}\begin{pmatrix}\bar{f}(\varepsilon,u,v)+Mu\\ \bar{g}(\varepsilon,u,v)+Mv\end{pmatrix}$$

性质1　若 $r>\lambda_1, b\neq\lambda_1$，或者 $r\neq\lambda_1, b>\lambda_1$，则 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F}_\varepsilon,(0,0))=0$.

性质2　若 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}, b>\lambda_1$，则 $\mathrm{index}_W(\boldsymbol{F},(0,0))=0$.

证明　首先证明 $(0,0)$ 是 $\boldsymbol{F}$ 在 W 中的孤立不动点. 假设不成立，则存在非负非平凡解 $W_i=(u_i,v_i)$，使得当 $i\to\infty$ 时 $W_i\to(0,0)$ 且 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F})W_i=\boldsymbol{0}$. 于是 u_i、v_i 满足

$$\begin{cases}-\Delta u_i=ru_i\left(1-\frac{u_i}{k}\right)-\frac{mu_iv_i^2}{u_i^2+av_i^2}; & x\in\Omega\\ -\Delta v_i=bv_i\left(1-\frac{v_i}{u_i+c}\right); & x\in\Omega\\ \frac{\partial u_i}{\partial n}+u_i=\frac{\partial v_i}{\partial n}+v_i=0; & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

显然，当 $u_i\equiv 0$ 时，$v_i=v^*$；当 $v_i\equiv 0$ 时，$u_i=\theta_{\left(r,\frac{r}{k}\right)}$. 因此只考虑 $W_i=(u_i,v_i)$, $u_i\geqslant 0,\not\equiv 0$, $v_i\geqslant 0,\not\equiv 0$ 的情况. 由最值原理只需讨论 $W_i=(u_i,v_i)$, $u_i>0$, $v_i>0$ 即可. 由引理2，若 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}$，

$b>\lambda_1$，则 $u_i>\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)}$，$v_i>v^*$. 这与 $W_i=(u_i,v_i)\to(0,0)$ 产生矛盾，所以 $(0,0)$ 是 $\boldsymbol{F}$ 在 W 中的孤立不动点.

接下来证明存在 $\sigma_0>0$ 使得对所有的 $U=(u,v)\in\overline{B((0,0),\sigma_0)}\cap W\backslash\{(0,0)\}$，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}_\varepsilon)U\neq\mathbf{0}$. 否则，存在 $\varepsilon_0>0$ 以及 $U_i=(u_i,v_i)\in B\left((0,0),\frac{1}{i}\right)\cap W\backslash\{(0,0)\}$，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}_{\varepsilon_0})U=\mathbf{0}$. 显而易见，$U_i=(u_i,v_i)\to(0,0)(i\to\infty)$. 而且 u_i、v_i 满足

$$-\Delta u_i=ru_i\left(1-\frac{u_i}{k}\right)-\frac{mu_iv_i^{\ 2}}{\varepsilon_0+u_i^{\ 2}+av_i^{\ 2}};\quad x\in\Omega$$

$$-\Delta v_i=bv_i\left(1-\frac{v_i}{u_i+c}\right);\quad x\in\Omega$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial n}+u_i=\frac{\partial v_i}{\partial n}+v_i=0;\quad x\in\partial\Omega$$

类似前面的讨论，仅考虑 $u_i>0$，$v_i>0$ 的情形. 令 $\hat{u}_i=\frac{u_i}{\|u_i\|_\infty}$，$\hat{v}_i=\frac{v_i}{\|v_i\|_\infty}$，则

$$-\Delta\hat{u}_i=r\hat{u}_i\left(1-\frac{u_i}{k}\right)-\frac{mv_i^{\ 2}}{\varepsilon_0+u_i^{\ 2}+av_i^{\ 2}}\hat{u}_i;x\in\Omega$$

$$-\Delta\hat{v}_i=b\hat{v}_i\left(1-\frac{v_i}{u_i+c}\right);\quad x\in\Omega$$

$$\frac{\partial\hat{u}_i}{\partial n}+\hat{u}_i=\frac{\partial\hat{v}_i}{\partial n}+\hat{v}_i=0;\quad x\in\partial\Omega$$

由 L^p 估计和 Sobolev 嵌入定理可知存在 $\hat{u}$、$\hat{v}$ 使得 $\hat{u}_i\to\hat{u}\geqslant0,\neq0$，$\hat{v}_i\to\hat{v}\geqslant0,\neq0$. 利用最值原理得 $\hat{u}>0$，$\hat{v}>0$. 对上式取极限，得

$$-\Delta\hat{u}=r\hat{u};\quad x\in\Omega$$

$$-\Delta\hat{v}=b\hat{v};\quad x\in\Omega$$

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial n}+\hat{u}=\frac{\partial\hat{v}}{\partial n}+\hat{v}=0;\quad x\in\partial\Omega$$

则 $r=\lambda_1$，$b=\lambda_1$，与已知产生矛盾. 最后由不动点指数的同伦不变性，可得 $\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(0,0))=\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F}_\varepsilon,(0,0))=0$.

□

最后由引理 3 并结合不动点指数的可加性可得系统(3)正解存在的充分条件.

定理 1 若 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}$，$b>\lambda_1$，则系统(3)至少存在一个正解.

证明 由于 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}$，$b>\lambda_1$，利用引理 3 得

$\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},D')=1$，$\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(0,0))=\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(u^*,0))=\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(0,v^*))=0$.

则

$$\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},D')\neq\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(0,0))+\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(u^*,0))+\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(0,v^*))$$

因此系统(3)至少存在一个正解.

□

3 正解的唯一性和稳定性

本章分析参数 m 对系统(3)正解唯一性和稳定性的影响，给出正解唯一且稳定的条件.

若 $r>\lambda_1$，$b>\lambda_1$，则问题

$$-\Delta v=bv\left(1-\frac{v}{u^*+c}\right);\quad x\in\Omega$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}+v=0;\quad x\in\partial\Omega$$

存在唯一正解，记作 v_*.

引理 4 假设 $r>\lambda_1$，$b>\lambda_1$，则存在正常数 $\tilde{s}$ 使得对于 $m\leqslant\tilde{s}$，系统(3)的任意正解(如果存在)非退化且线性稳定.

证明 采用反证法. 假设对于 $m_i\to0$ 的序列 $\{m_i\}$，系统(3)存在退化或线性不稳定的正解 (u_i,v_i)，其中 $m=m_i$，$i\geqslant1$，于是存在 $\mathrm{Re}(\mu_i)\leqslant0$ 的 μ_i 和 $\|\xi_i\|_{L^2}^2+\|\eta_i\|_{L^2}^2=1$ 的 $(\xi_i,\eta_i)\neq(0,0)$ 使得

$$-\Delta\xi_i-r\left(1-\frac{2u_i}{k}\right)\xi_i+\frac{(av_i^2-u_i^2)m_iv_i^2}{(u_i^2+av_i^2)^2}\xi_i+\frac{2m_iu_i^3v_i}{(u_i^2+av_i^2)^2}\eta_i=\mu_i\xi_i;\ x\in\Omega$$

$$-\Delta\eta_i-b\left(1-\frac{2v_i}{u_i+c}\right)\eta_i-\frac{bv_i^{\ 2}}{(u_i+c)^2}\xi_i=\mu_i\eta_i;\ x\in\Omega$$

$$\frac{\partial\xi_i}{\partial n}+\xi_i=\frac{\partial\eta_i}{\partial n}+\eta_i=0;\ x\in\partial\Omega\tag{5}$$

容易看出，$m_i\to0$ 时，$(u_i,v_i)\to(u^*,v_*)$. 给式(5)两边分别乘以 ξ_i 和 η_i 的复共轭 $\bar{\xi}_i$ 和 $\bar{\eta}_i$，并在 Ω 上积分，可得

$$\mu_i=\int_\Omega|\nabla\xi_i|^2\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}|\xi_i|^2\mathrm{d}s-$$

$$\int_{\Omega} r\left(1-\frac{2u_i}{k}\right)|\xi_i|^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\Omega}\frac{(av_i^2-u_i^2)m_iv_i^2}{(u_i^2+av_i^2)^2}|\xi_i|^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\Omega}\frac{2m_iu_i^3v_i}{(u_i^2+av_i^2)^2}\eta_i\bar{\xi}_i\mathrm{d}x+\int_{\Omega}|\nabla\eta_i|^2\mathrm{d}x+$$
$$\int_{\partial\Omega}|\eta_i|^2\mathrm{d}s-\int_{\Omega} b\left(1-\frac{2v_i}{u_i+c}\right)|\eta_i|^2\mathrm{d}x-$$
$$\int_{\Omega}\frac{b{v_i}^2}{(u_i+c)^2}\xi_i\bar{\eta}_i\mathrm{d}x$$

由 u_i、v_i 有界可得 $\mathrm{Re}(\mu_i)$ 及 $\mathrm{Im}(\mu_i)$ 有界，因此 μ_i 有界. 设 $\mu_i\to\mu$，则 $\mathrm{Re}(\mu)\leqslant 0$. 根据 L^p 估计可得 $\|\xi_i\|_{W^{2,2}}$ 和 $\|\eta_i\|_{W^{2,2}}$ 有界. 于是可设 $\xi_i\to\xi$，$\eta_i\to\eta$.

对式(5)令 $i\to\infty$，有

$$\begin{cases}-\Delta\xi-r\left(1-\dfrac{2u^*}{k}\right)\xi=\mu\xi; & x\in\Omega\\ -\Delta\eta-b\left(1-\dfrac{2v_*}{u^*+c}\right)\eta-\dfrac{b(v_*)^2}{(u^*+c)^2}\xi=\mu\eta; & x\in\Omega\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial n}+\xi=\dfrac{\partial\eta}{\partial n}+\eta=0; & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{6}$$

如果 $\xi\not\equiv 0$，则由式(6)可知

$$\mu\geqslant\lambda_1\left(-r+\frac{2ru^*}{k}\right)>0$$

矛盾，故 $\xi\equiv 0$. 于是

$$\mu\geqslant\lambda_1\left(-b+\frac{2bv_*}{u^*+c}\right)>\lambda_1\left(-b+\frac{bv_*}{u^*+c}\right)=0$$

此矛盾说明结论成立.

□

定理 2　假设 $r>\lambda_1+\dfrac{m}{a}$，$b>\lambda_1$，则存在正常数 $\tilde{s}$ 使得对于 $m\leqslant\tilde{s}$，系统(3)存在唯一正解且非退化线性稳定.

证明　由定理 1 可得系统(3)存在正解. 根据前提易知系统(3)的半平凡解远离正解. 于是由紧性理论可知系统(3)最多有有限多个正解，记为 $\{(u_i,v_i):0\leqslant i\leqslant l\}$. 令 $\boldsymbol{F}$ 在 (u_i,v_i) 处的 Fréchet 导数为 $\boldsymbol{L}$. 通过验证得 $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}$ 在 E 上可逆，$\boldsymbol{L}$ 没有大于 1 的特征值. 而且，由 $\overline{W}_{(u_i,v_i)}=S_{(u_i,v_i)}$ 得 $\boldsymbol{L}$ 没有性质 α. 因此，由文献[21]可得 $\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(u_i,v_i))=1$. 最后根据引理 3 以及不动点指数的可加性得

$$1=\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},D')=\sum_{1\leqslant i\leqslant l}\underset{W}{\mathrm{index}}(\boldsymbol{F},(u_i,v_i))+0=l$$

故结合引理 4 得到系统(3)存在非退化且线性稳定的唯一正解.

□

4　半平凡解的稳定性和渐近行为

本章通过抛物方程的比较原理探讨系统(2)的灭绝性和持久性. 首先探讨半平凡解 $(u^*,0)$ 和 $(0,v^*)$ 的稳定性.

引理 5　(i)设 $r>\lambda_1$. 如果 $b<\lambda_1$，则半平凡解 $(u^*,0)$ 稳定；如果 $b>\lambda_1$，则半平凡解 $(u^*,0)$ 不稳定.

(ii)设 $b>\lambda_1$. 如果 $r<\lambda_1+\dfrac{m}{a}$，则半平凡解 $(0,v^*)$ 稳定；如果 $r>\lambda_1+\dfrac{m}{a}$，则半平凡解 $(0,v^*)$ 不稳定.

证明　由于(i)和(ii)的证明类似，因此只证明(ii). 考虑系统(3)在 $(0,v^*)$ 处的线性化特征值问题：

$$\begin{cases}-\Delta\phi-\left(r-\dfrac{m}{a}\right)\phi=e\phi; & x\in\Omega\\ -\Delta\varphi-b\left(1-\dfrac{2v^*}{c}\right)\varphi-\dfrac{b}{c^2}(v^*)^2\phi=e\varphi; & x\in\Omega\\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n}+\phi=\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}+\varphi=0; & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{7}$$

易证得系统(7)的主特征值 e_1 满足 $e_1=\min\left\{\lambda_1\times\left(\dfrac{m}{a}-r\right),\lambda_1\left(\dfrac{2bv^*}{c}-b\right)\right\}$. 显然，$\lambda_1\left(\dfrac{2bv^*}{c}-b\right)>0$. 如果 $r<\lambda_1+\dfrac{m}{a}$，则 $\lambda_1\left(\dfrac{m}{a}-r\right)>0$. 于是 $e_1>0$，所以 $(0,v^*)$ 稳定. 类似地，如果 $r>\lambda_1+\dfrac{m}{a}$，则 $e_1<0$. 因此 $(0,v^*)$ 不稳定.

□

其次给出系统(2)灭绝的充分条件.

定理 3　设 (u,v) 是系统(2)的正解. 如果 $r\leqslant\lambda_1$，$b>\lambda_1$，则当 $t\to\infty$ 时，$(u,v)\to(0,v^*)$.

证明 因为

$$u_t-\Delta u\leqslant ru\left(1-\frac{u}{k}\right);\quad x\in\Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+u=0;\quad x\in\partial\Omega$$

由比较原理得，当 $t\to\infty$ 时，$u(x,t)\to 0$. 令 ϵ 是充分小的正常数，则存在 $T_\epsilon\geqslant 0$ 使得所有 $t>T_\epsilon$ 有 $u(x,t)<\epsilon$. 由系统(2)的第二个方程得

$$v_t-\Delta v\leqslant bv\left(1-\frac{v}{c+\epsilon}\right);\quad x\in\Omega,t>T_\epsilon$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}+v=0;\quad x\in\partial\Omega,t>T_\epsilon$$

于是

$$\limsup_{t\to\infty} v(x,t)\leqslant\theta_{\left(b,\frac{b}{c+\epsilon}\right)}\tag{8}$$

又由系统(2)的第二个方程得

$$v_t-\Delta v\geqslant bv\left(1-\frac{v}{c}\right)$$

再由比较原理有

$$\liminf_{t\to\infty} v(x,t)\geqslant\theta_{\left(b,\frac{b}{c}\right)}\tag{9}$$

由 $\epsilon\to 0$ 的连续性再结合式(8)和(9)可得，当 $t\to\infty$ 时，$v(x,t)\to v^*$.

□

最后给出系统(2)的持久性条件.

定理4 若 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}$，$b>\lambda_1$，则在 $C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 上存在拟解 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 和 $(\hat{u},\hat{v})$，满足关系

$$\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)}\leqslant\tilde{u}\leqslant\hat{u}\leqslant u^*,\ v^*\leqslant\tilde{v}\leqslant\hat{v}\leqslant v_*\tag{10}$$

和方程

$$\left.\begin{aligned}
&-\Delta\hat{u}=r\hat{u}\left(1-\frac{\hat{u}}{k}\right)-\frac{m\hat{u}\tilde{v}^2}{\hat{u}^2+a\tilde{v}^2}\\
&-\Delta\tilde{u}=r\tilde{u}\left(1-\frac{\tilde{u}}{k}\right)-\frac{m\tilde{u}\hat{v}^2}{\tilde{u}^2+a\hat{v}^2}\\
&-\Delta\hat{v}=b\hat{v}\left(1-\frac{\hat{v}}{\hat{u}+c}\right)\\
&-\Delta\tilde{v}=b\tilde{v}\left(1-\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}+c}\right)\\
&\frac{\partial\hat{u}}{\partial n}+\hat{u}=\frac{\partial\tilde{u}}{\partial n}+\tilde{u}=0\\
&\frac{\partial\hat{v}}{\partial n}+\hat{v}=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial n}+\tilde{v}=0
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

并且，$[\tilde{u},\hat{u}]\times[\tilde{v},\hat{v}]$ 是系统(2)的正全局吸引子.

证明 令 $(f(u,v),g(u,v))=\left(ru\left(1-\frac{u}{k}\right)-\frac{muv^2}{u^2+av^2},bv\left(1-\frac{v}{u+c}\right)\right)$. 易证得 $(f(u,v),g(u,v))$ 混拟单调，则利用上下解方法可知 (u^*,v_*) 和 $\left(\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)},v^*\right)$ 是系统(3)的一对有序上下解. 由于在 $\left[\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)},u^*\right]\times[v^*,v_*]$ 上 $(f(u,v),g(u,v))$ 满足 Lipschitz 条件，故利用单调迭代序列方法可得系统(2)存在满足关系(10)和方程(11)的拟解 $(\tilde{u},\tilde{v})$ 和 $(\hat{u},\hat{v})$.

由 $r>\lambda_1$ 且 $-\Delta u\leqslant ru\left(1-\frac{u}{k}\right)$，结合比较原理可得

$$\limsup_{t\to\infty} u(x,t)\leqslant u^*\tag{12}$$

令 ϵ 是充分小的正常数，于是存在 $T_\epsilon\geqslant 0$，使得对所有的 $t>T_\epsilon$，有 $u(x,t)\leqslant u^*+\epsilon$. 因此，

$$v_t-\Delta v\leqslant bv\left(1-\frac{v}{(u^*+\epsilon)+c}\right);\quad x\in\Omega,t>T_\epsilon$$

$$\frac{\partial v}{\partial n}+v=0;\quad x\in\partial\Omega,t>T_\epsilon$$

由比较原理有 $\limsup_{t\to\infty} v(x,t)\leqslant v_*$. 故存在 $T'_\epsilon\geqslant 0$ 使得对所有的 $t>T'_\epsilon$，有

$$v(x,t)\leqslant v_*+\epsilon\tag{13}$$

另一方面，由系统(2)有

$$u_t-\Delta u\geqslant u\left(r-\frac{ru}{k}-\frac{m}{a}\right);\quad x\in\Omega,t>0$$

$$v_t-\Delta v\geqslant v\left(b-\frac{bv}{c}\right);\quad x\in\Omega,t>0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+u=\frac{\partial v}{\partial n}+v=0;\quad x\in\partial\Omega,t>0$$

根据比较原理可得

$$\liminf_{t\to\infty} u(x,t)\geqslant\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)},\ \liminf_{t\to\infty} v(x,t)\geqslant v^*$$

于是存在 $T''_\epsilon\geqslant 0$ 使得对于所有的 $t>T''_\epsilon$，有

$$u(x,t)\geqslant\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)}-\epsilon,\ v(x,t)\geqslant v^*-\epsilon\tag{14}$$

设 $T^*=\max\{T_\epsilon,T'_\epsilon,T''_\epsilon\}$，则对所有的 $t>T^*$，有

$$(u,v)\in\left[\theta_{\left(r-\frac{m}{a},\frac{r}{k}\right)}-\epsilon,u^*+\epsilon\right]\times[v^*-\epsilon,v_*+\epsilon];\quad\forall\epsilon>0$$

令 $\epsilon\to 0$，则由式(12)～(14)并结合文献[22]中的

推论 2.1 和定理 2.1 可知结论成立.

□

5 结 语

本文在 Robin 边界条件下讨论了一类基于比率依赖的修正 Leslie-Gower 捕食-食饵扩散模型. 通过不动点指数理论给出了食饵和捕食者的共存条件，即定理 1；在此基础上，结合线性算子的稳定性理论和扰动理论得到了正解的唯一性和稳定性条件，即定理 2；最后确定了系统的灭绝性和持久性条件，即定理 3 和定理 4. 从生物学意义上讲，研究结果表明当食饵和捕食者的增长率较大，即 $r>\lambda_1+\frac{m}{a}, b>\lambda_1$ 时，两种群能够长期共存，进而当捕食者的捕获率 m 充分小时，食饵和捕食者会以稳定均衡的形式共存，这对于生物种群的保护具有重要意义.

参考文献：

[1] WU Jianhua. Stability and persistance for prey-predator model with saturation [J]. **Chinese Science Bulletin**, 1998, **43**(24): 2102-2103.

[2] ZHOU Jun, SHI Junping. The existence, bifurcation and stability of positive stationary solutions of a diffusive Leslie-Gower predator-prey model with Holling-type Ⅱ functional responses [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 2013, **405**(2): 618-630.

[3] YANG Liu, ZHONG Shouming. Dynamics of a diffusive predator-prey model with modified Leslie-Gower schemes and additive Allee effect [J]. **Computational and Applied Mathematics**, 2015, **34**(2): 671-690.

[4] LI Haixia, LI Yanling, YANG Wenbin. Existence and asymptotic behavior of positive solutions for a one-prey and two-competing-predators system with diffusion [J]. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, 2016, **27**: 261-282.

[5] PENG Yahong, LIU Yangyang. Turing instability and Hopf bifurcation in a diffusive Leslie-Gower predator-prey model [J]. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, 2016, **39**(14): 4158-4170.

[6] KUANG Yang, BERETTA E. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system [J]. **Journal of Mathematical Biology**, 1998, **36**(4): 389-406.

[7] YANG Wenbin, LI Yanling, WU Jianhua, *et al*. Dynamics of a food chain model with ratio-dependent and modified Leslie-Gower functional responses [J]. **Discrete and Continuous Dynamical Systems - B**, 2015, **20**(7): 2269-2290.

[8] INDRAJAYA D, SURYANTO A, ALGHOFARI A R. Dynamics of modified Leslie-Gower predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response and additive Allee effect [J]. **International Journal of Ecology and Development**, 2016, **31**(3): 60-71.

[9] LIU Xia, LIU Yanwei. Dynamic behavior of a delayed modified Leslie predator prey system with Crowley-Martin functional response and feedback controls [J]. **Advances in Mathematics**, 2012, **41**(4): 501-511.

[10] LI Haixia. Asymptotic behavior and multiplicity for a diffusive Leslie-Gower predator-prey system with Crowley-Martin functional response [J]. **Computers and Mathematics with Applications**, 2014, **68**(7): 693-705.

[11] ZHOU Jun. Qualitative analysis of a modified Leslie-Gower predator-prey model with Crowley-Martin functional responses [J]. **Communications on Pure and Applied Analysis**, 2015, **14**(3): 1127-1145.

[12] 李海侠. 一类食物链模型正解的稳定性和唯一性 [J]. 数学物理学报, 2017, **37**(6): 1094-1104.
LI Haixia. Stability and uniqueness of positive solutions for a food-chain model [J]. **Acta Mathematica Scientia**, 2017, **37**(6): 1094-1104. (in Chinese)

[13] 刘开源, 陈兰荪. 捕食者具脉冲扰动与 Ivlev 功能性反应的时滞捕食-食饵模型 [J]. 大连理工大学学报, 2008, **48**(6): 926-931.
LIU Kaiyuan, CHEN Lansun. An Ivlev′s functional response predator-prey model with time delay and

impulsive perturbations on predators [J]. **Journal of Dalian University of Technology**, 2008, **48**(6): 926-931. (in Chinese)

[14] JIA Yunfeng. A sufficient and necessary condition for the existence of positive solutions for a prey-predator system with Ivlev-type functional response [J]. **Applied Mathematics Letters**, 2011, **24**(7): 1084-1088.

[15] JIA Yunfeng, WU Jianhua, NIE Hua. The coexistence states of a predator-prey model with nonmonotonic functional response and diffusion [J]. **Acta Applicandae Mathematicae**, 2009, **108**(2): 413-428.

[16] BILAL AJAZ M, SAEED U, DIN Q, *et al*. Bifurcation analysis and chaos control in discrete-time modified Leslie-Gower prey harvesting model [J]. **Advances in Difference Equations**, 2020(1): 45.

[17] AMIRABAD H Q, RABIEI MOTLAGH O, MOHAMMADI NEJADH M. Permanency in predator-prey models of Leslie type with ratio-dependent simplified Holling type-Ⅳ functional response [J]. **Mathematics and Computers in Simulation**, 2019, **157**: 63-76.

[18] DU Yihong, HSU S B. A diffusive predator-prey model in heterogeneous environment [J]. **Journal of Differential Equations**, 2004, **203**(2): 331-364.

[19] MA Zhanping. Spatiotemporal dynamics of a diffusive Leslie-Gower prey-predator model with strong Allee effect [J]. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, 2019, **50**: 651-674.

[20] LI Shanbing, WU Jianhua, NIE Hua. Steady-state bifurcation and Hopf bifurcation for diffusive Leslie-Gower predator-prey model [J]. **Computers and Mathematics with Applications**, 2015, **70**(12): 3043-3056.

[21] DANCER E N. On the indices of fixed points of mappings in cones and applications [J]. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 1983, **91**(1): 131-151.

[22] PAO C V. Quasisolutions and global attractor of reaction-diffusion systems [J]. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications**, 1996, **26**(12): 1889-1903.

Existence and uniqueness of positive solutions for ratio-dependent modified Leslie-Gower predator-prey model

DOU Xiaoxia, LI Haixia*

(School of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: A ratio-dependent modified Leslie-Gower predator-prey model with diffusion is investigated. By the fixed point index theory, the condition for the existence of positive solutions is given. Secondly, the uniqueness and stability of positive solutions are studied by means of the combination of the perturbation theory and the fixed point index theory, and the condition of the uniqueness and stability of positive solutions is determined. Finally, by virtue of the comparison principle to parabolic equations, the asymptotic behavior of the system is discussed. The results show that if the parameters meet certain conditions, the two species can coexist and the system has unique stable positive solution.

Key words: predator-prey model; fixed point index theory; perturbation theory; uniqueness; stability; asymptotic behavior