第63卷第4期
2023年7月
大连理工大学学报
Journal of Dalian University of Technology
Vol.63, No.4
July 2023

文章编号：1000-8608(2023)04-0433-08

K_{n_1,n_2,n_3,n_4}的点被多重集可区别的一般全染色($n_1\leqslant n_2<n_3\leqslant n_4$)

王勇军， 陈祥恩*

(西北师范大学 数学与统计学院，甘肃 兰州 730070)

摘要：图G的一般全染色是指使用若干种元素对于图G的全体点及边的一个分配. 通常情况下，染色时所用的k种颜色用$1,2,\cdots,k$来表示，且数字代表的颜色之间有大小关系. 图G使用了k种颜色的一般全染色叫作图G的k-一般全染色. 利用反证法、构造染色法及色集合事先分配法，讨论了完全四部图K_{n_1,n_2,n_3,n_4}($n_1\leqslant n_2<n_3\leqslant n_4$)的点被多重集可区别的一般全染色. 给出了最优染色方案，并确定了相应染色的色数.

关键词：完全四部图；一般全染色；多重集；色集合；可区别

中图分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**doi**：10.7511/dllgxb202304014

0 引言

点可区别一般边染色是由Harary等于1985年在文献[1]中提出的. 文献[2]中引入了点可区别一般全染色，并且研究了路、圈、星(即$K_{1,n}$)、双星、三星、轮、扇、完全图的点可区别一般全染色，确定了它们的点可区别一般全色数. 在文献[3]中研究了完全二部图$K_{2,n}$和$K_{3,n}$的点可区别(被非多重集的)一般全染色，文献[4]中解决了部分完全三部图的点可区别(被非多重集的)IE-全染色，而在文献[5]中提出点被多重集可区别的IE-全染色及一般全染色，且对完全二部图的点被多重集可区别的IE-全染色及一般全染色都做了研究. 本文研究完全四部图的点被多重集可区别的一般全染色，给出染色方案并确定相应的点被多重集可区别的一般全色数.

1 准备工作

设f为图G的一般全染色. 对于任意的$x\in V(G)$，用$\widetilde{C}_f(x)$或者$\widetilde{C}(x)$表示点x的色以及与x相关联的边的颜色构成的多重集. 称$\widetilde{C}_f(x)$为x的多重色集合或者色集合. 显然有$|\widetilde{C}_f(x)|=d_G(x)+1$，其中$d_G(x)$表示图$G$中点$x$的度. 若对任意的$u,v\in V$，$u\neq v$，总有$\widetilde{C}_f(u)\neq\widetilde{C}_f(v)$，则称$f$是点被多重集可区别的.

令$\widetilde{\chi}_{\rm gvt}(G)=\min\{k\mid$图$G$存在点被多重集可区别的$k$-一般全染色$\}$，将$\widetilde{\chi}_{\rm gvt}(G)$称为点被多重集可区别的一般全色数.

用K_{n_1,n_2,n_3,n_4}表示4个部的点数分别为n_1、n_2、n_3、n_4的完全四部图，第i个部为$X_i=\{x_1^{(i)},x_2^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}\}$，$|X_i|=n_i$，$n_i\leqslant n_j$，$1\leqslant i<j\leqslant 4$.

在K_{n_1,n_2,n_3,n_4}的一个k-一般全染色下，X_4是含点最多的部，X_4中点的色集合为$\{a_{j,1},a_{j,2},\cdots,a_{j,n_1+n_2+n_3+1}\}$，色集合中包含$n_1+n_2+n_3+1$种元素(重复的按重复出现的次数计算).

为了便于叙述，本文中部分位置用G来代表K_{n_1,n_2,n_3,n_4}.

设X、Y是图G点集$V(G)$的两个非空子集. 用$[X,Y]$表示一个顶点在X、另一个顶点在Y的所有边构成的集合.

本文中经常用到由颜色1的数目使得两个点可区别的方法：当某一步染色方案染色成功后，图G中的某两点$x_i^{(t)}$与$x_j^{(s)}$的色集合所含元素数目相等且$\widetilde{C}(x_i^{(t)})$中含元素1的数目大于$\widetilde{C}(x_j^{(s)})$中含元素1的数目，在X_4中点对应的多重集元

收稿日期：2023-01-26；　**修回日期**：2023-05-19.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(11761064).
作者简介：王勇军(1998—)，男，硕士生，E-mail：wangyongjun0612@163.com；陈祥恩*(1965—)，男，教授，E-mail：chenxe@nwnu.edu.cn.

素的染色顺序中，染边 $x_i^{(t)}x_l^{(4)}$ 先于染边 $x_j^{(s)}x_l^{(4)}$，那么，当 X_4 中出现更多的点时，在上一步染色方案的基础上，给 X_4 中未染点及边的顶点对应一个多重集，这个多重集异于 X_4 中其他点对应的多重集，且集合中元素按不减顺序排列，染色顺序保持不变，那么依然有 $\widetilde{C}(x_i^{(t)})$ 中含元素 1 的数目大于 $\widetilde{C}(x_j^{(s)})$ 中含元素 1 的数目，即 $\widetilde{C}(x_i^{(t)})\neq\widetilde{C}(x_j^{(s)})$ 恒成立，$s,t\in[1,3]$，$i\in[1,n_t]$，$j\in[1,n_s]$，$l\in[1,n_4]$.

引理 1[6] 从 n 个互异元素中可重复取出 r 个组合的数目为 $\binom{n+r-1}{r}$.

从 n 个互不相同元素中取出 r 个做成的重复组合叫作 r-组合. r-组合也是前述 n 个互不相同元素构成的集合的含有 r 个元素的多重子集合，所以 r-组合也叫作 r-多重子集或简称为 r-子集.

在不特殊说明的情况下，本文中书写一个 r-子集时，里面的元素按照不减的顺序排列.

2 完全四部图的点被多重集可区别的一般全染色

定理 1 (i)当 $n_1\leqslant n_2<n_3=n_4$ 且 $n_2+1\leqslant n_4\leqslant n_1+n_2+2$ 时，$\widetilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=2$.

(ii)当 $n_1\leqslant n_2<n_3=n_4$ 且 $n_4\geqslant n_1+n_2+3$ 时，$\widetilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=3$.

由于 $n_1=n_2<n_3=n_4$ 与 $n_1<n_2<n_3=n_4$ 在证明过程中有诸多类似的地方，所以这里将两种类型合并到一起证明.

(i)当 $n_1\leqslant n_2<n_3=n_4$ 时，由引理 1 可知，两种色的$(n_1+n_2+n_3+1)$-子集共有 $n_1+n_2+n_3+2$ 个，要使得两种色可以满足要求的染色，至少需 $n_1+n_2+n_3+2\geqslant 2n_4\Rightarrow n_4\leqslant n_1+n_2+2$.

下面分两种情况构造图 G 的使用了两种色的点被多重集可区别的一般全染色的染色方案.

a. $n_2+1\leqslant n_4\leqslant n_1+n_2+1$

将 1、2 这两种色的$(n_1+n_2+n_3+1)$-子集按照{1,1,1,…,1,1,1}，{1,1,1,…,1,1,2}，{1,1,1,…,1,2,2}，…，{1,1,2,…,2,2,2}，{1,2,2,…,2,2,2}，{2,2,2,…,2,2,2}排序.

取前 $\left\lceil\frac{n_4}{2}\right\rceil$ 个集合及后 $\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$ 个集合共 n_4 个集合依次分配给 X_3 的 n_4 个点.

从第$\left(\left\lceil\frac{n_1+n_2+n_3+3}{2}\right\rceil-\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor\right)$开始取，取出 n_4 个子集依次分配给 X_4 的 n_4 个点.

给 X_j 中每个点染以色 j，$j=1,2$. $[X_1,X_2]$中的每条边染以色 2.

令 X_3 中前 $\left\lceil\frac{n_4}{2}\right\rceil$ 个点与 X_4 中每个点所连的边染以色 1，X_3 中后 $\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$ 个点与 X_4 中每个点所连的边染以色 2.

这样，$[X_3,X_4]$中的边已染好，此时，X_3、X_4 中点对应的集合中已有 n_3 个元素被确定，将剩余的 n_1+n_2+1 个元素以不减顺序排列，记为$\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,n_1+n_2+1}\}$.

令颜色 $a_{i,1}$ 染点 $x_i^{(s)}$，颜色 $a_{i,2}$ 染边 $x_1^{(1)}x_i^{(s)}$，…，颜色 a_{i,n_1+1} 染边 $x_{n_1}^{(1)}x_i^{(s)}$，颜色 a_{i,n_1+2} 染边 $x_1^{(2)}x_i^{(s)}$，颜色 a_{i,n_1+3} 染边 $x_2^{(2)}x_i^{(s)}$，…，颜色 a_{i,n_1+n_2+1} 染边 $x_{n_2}^{(2)}x_i^{(s)}$，$s=3,4$，$i\in[1,n_s]$.

这样，图 G 中所有的点及边已染好，下面说明在这种染色方案下，不同点的色集合不同.

(1)一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

由染色方案可知，X_1 中点的色集合所含元素 1 的数目恒多于 X_2 中点的色集合所含元素 1 的数目，又因为 X_3、X_4 中点的色集合所含元素数目大于 X_1、X_2 中点的色集合所含元素数目，且 X_3、X_4 中点的色集合被分配以不同的$(n_1+n_2+n_3+1)$-子集，故一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

(2)同一部的点的色集合互不相同.

先说明 X_1、X_2 中点的色集合各不相同. 在上述染色方案中，将 X_3、X_4 中点对应的集合中，用于染点及$[X_3,X_4]$中边的元素去掉，将剩余元素以不减顺序排成一列，共有 $2n_4$ 个(n_1+n_2)-子集，必存在一组{1,1,1,…,1,1,1}，{1,1,1,…,1,1,2}，{1,1,1,…,1,2,2}，…，{1,1,2,…,2,2,2}，{1,2,2,…,2,2,2}，{2,2,2,…,2,2,2}，这些元素用于染$[X_1\cup X_2,X_3\cup X_4]$中的边.

这样，在$[X_1,X_2]$中的每条边染以色 2，X_1 中每个点染以色 1，X_2 中每个点染以色 2 的基础上，有 $\widetilde{C}(x_i^{(t)})$ 中元素 1 的数目恒多于 $\widetilde{C}(x_j^{(t)})$ 中元素 1 的数目，$t=1,2$，$i<j$，$i,j\in[1,n_t]$

又因为 X_3、X_4 中点对应不同的$(n_1+n_2+$

n_3+1)-子集，故同一部的点的色集合互不相同.

b. $n_4=n_1+n_2+2$

此时，色集合提前分配需考虑 n_4 的奇偶性.

当 $n_1<n_2<n_3=n_4$ 时，n_1+n_2+2 存在奇数和偶数两种可能性，当 $n_1=n_2<n_3=n_4$ 时，n_1+n_2+2 必为偶数.

①当 n_4 为偶数时，依旧将1、2这两种色的 $(n_1+n_2+n_3+1)$-子集按照前文方式排序.

取前$\frac{n_4}{2}$个集合及后$\frac{n_4}{2}$个集合，共 n_4 个集合按顺序依次分配给 X_3 中 n_4 个点.

从第$\left(\frac{n_4}{2}+1\right)$个集合开始取，一直取到第$\frac{3n_4}{2}$个集合，共 n_4 个集合依次分配给 X_4 中 n_4 个点.

给 X_j 中每个点染以色 j，$j=1,2$. $[X_1,X_2]$中的每条边染以色2.

令 X_3 中前$\frac{n_4}{2}$个点与 X_4 中每个点所连的边染以色1，X_3 中后$\frac{n_4}{2}$个点与 X_4 中每个点所连的边染以色2.

后续步骤与当 $n_2+1\leqslant n_4\leqslant n_1+n_2+1$ 时的情况相同，不再赘述.

②当 n_4 为奇数时，依旧将1、2这两种色的 $(n_1+n_2+n_3+1)$-子集按照前文方式排序.

取前$\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$个集合、第$\left(2\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor+1\right)$个集合、后$\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$个集合共 n_4 个集合依次分配给 X_3 中 n_4 个点.

取第$\left(\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor+1\right)$到第$2\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$个集合、第$\left(2\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor+2\right)$个集合、第$\left(2\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor+3\right)$到第$\left(3\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor+2\right)$个集合共 n_4 个集合依次分配给 X_4 中 n_4 个点.

令 X_j 中每个点染以色 j，$j=1,2$. $[X_1,X_2]$中的每条边染以色2.

X_3 中前$\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$个点与 X_4 中每个点所连的边染以色1.

X_3 中第$\left(\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor+1\right)$个点与 X_4 中前$\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$个点所连的边染以色1，与 X_4 中后$\left\lceil\frac{n_4}{2}\right\rceil$个点所连的边染以色2.

X_3 中后$\left\lfloor\frac{n_4}{2}\right\rfloor$个点与 X_4 中每个点所连的边染以色2.

后续步骤与当 $n_2+1\leqslant n_4\leqslant n_1+n_2+1$ 时的情况相同，不再赘述.

(ii)当 $n_4\geqslant n_1+n_2+3$ 时，由(i)中的讨论可知，两种色无法满足要求的染色，下面给出图 G 使用了3种色的点被多重集可区别的一般全染色的染色方案.

设 $\boldsymbol{A}$ 为次对角线及其上方元素全为1，而次对角线下方元素全为2的阶为 $2n_1$ 的方阵，$\boldsymbol{D}$ 为 $(n_3-2n_1)\times 2n_1$ 的元素全为2的矩阵，$\boldsymbol{C}_i$ 为次对角线及其上方元素全为1，而次对角线下方元素全为2的阶为 n_i 的方阵，$\boldsymbol{J}_i$ 为元素全为2的 $(n_3-n_i)\times n_i$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为次对角线及其下方元素全为3，而次对角线上方元素全为2的阶为 n_3 的方阵，$\boldsymbol{N}$ 为元素全为3的 $n_3\times 1$ 矩阵，$i=1,2$.

当 $n_1=n_2$ 时，令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{Q}\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N})$；

当 $n_1<n_2$ 时，令 $\boldsymbol{T}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_i\\ \boldsymbol{J}_i\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{T}_1\quad \boldsymbol{T}_2\quad \boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{N})$.

将 $\boldsymbol{M}$ 的行对应的子集依次分配给 X_4 中的 n_4 个点.

设 $x_i^{(4)}$ 对应的子集为 $\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,n_1+n_2+n_3+1}\}$，$i=1,2,\cdots,n_4$.

令颜色 $a_{i,1}$ 染边 $x_1^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,2}$ 染边 $x_2^{(1)}x_i^{(4)}$，…，颜色 a_{i,n_1} 染边 $x_{n_1}^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+1} 染边 $x_1^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+2} 染边 $x_2^{(2)}x_i^{(4)}$，…，颜色 a_{i,n_1+n_2} 染边 $x_{n_2}^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+n_2+1} 染边 $x_1^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+n_2+2} 染边 $x_2^{(3)}x_i^{(4)}$，…，颜色 $a_{i,n_1+n_2+n_3}$ 染边 $x_{n_3}^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,n_1+n_2+n_3+1}$ 染点 $x_i^{(4)}$.

给 X_j 中的每个点染以色 j，$j=1,2,3$. 给 $[X_3,X_1\cup X_2]$、$[X_1,X_2]$中的每条边染以色2.

这样，图 G 中所有的点及边已染完，下面说明图 G 中点的色集合不同.

(1)一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

X_3 中点的色集合仅含元素2、3，不含元素1，而 X_4 中点的色集合含元素1、2、3，且 X_3、X_4 中点的色集合所含元素数目小于 X_1、X_2 中点的色集合所含元素数目，下面考虑区分 X_1、X_2 中点的色集合.

当 $n_1=n_2$ 时，由染色方案可知，X_1 中点的色集合含元素 1 的数目恒大于 X_2 中点的色集合含元素 1 的数目.

当 $n_1<n_2$，X_1 中点的色集合所含元素数目大于 X_2 中点的色集合所含元素数目.

故一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

(2)同一部中点的色集合互不相同.

$\widetilde{C}(x_i^{(t)})$中元素 1 的数目恒大于$\widetilde{C}(x_j^{(t)})$中元素 1 的数目，$t=1,2,i<j,i,j\in[1,n_t]$.

$\widetilde{C}(x_p^{(s)})$中元素 3 的数目恒小于$\widetilde{C}(x_q^{(s)})$中元素 3 的数目，$s=3,4,p<q,p,q\in[1,n_s]$.

故同一部中点的色集合互不相同.

例 1　求完全四部图 $K_{3,4,5,5}$ 的点被多重集可区别的一般全染色的全色数及染色方案.

解　将 1、2 这两种色的 13-子集按照染色方案所述排成一列，并标号 1，2，…，14.

取标号为 1、2、3、13、14 的 5 个集合依次分配给 X_3 中的 5 个点.

取标号为 6、7、8、9、10 的 5 个集合依次分配给 X_4 中的 5 个点.

给 X_j 中每个点染以色 j，$j=1,2$. $[X_1,X_2]$中的每条边染以色 2.

令 X_3 中前 3 个点与 X_4 中每个点所连的边染以色 1，X_3 中后 2 个点与 X_4 中每个点所连的边染以色 2.

这样，$[X_3,X_4]$中的边已染好，此时，X_3、X_4 中点对应的集合中已有 5 个元素被确定，将剩余的 8 个元素以不减顺序排列，记为$\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,8}\}$.

令颜色 $a_{i,1}$染点 $x_i^{(s)}$，颜色 $a_{i,2}$染边 $x_1^{(1)}x_i^{(s)}$，…，颜色 $a_{i,4}$染边 $x_3^{(1)}x_i^{(s)}$，颜色 $a_{i,5}$染边 $x_1^{(2)}x_i^{(s)}$，颜色 $a_{i,6}$染边 $x_2^{(2)}x_i^{(s)}$，…，颜色 $a_{i,8}$染边 $x_4^{(2)}x_i^{(s)}$，$s=3,4,i\in[1,n_s]$.

这样，图 G 中所有的点及边已染好，下面对 X_j 中点的色集合进行列举，$j=1,2$.

X_1：$\widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_2^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_3^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$

X_2：$\widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_2^{(2)})=\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_3^{(2)})=\{1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_4^{(2)})=\{1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$

故$\widetilde{C}_{\mathrm{gvt}}(K_{3,4,5,5})=2$.

例 2　求完全四部图 $K_{3,4,9,9}$ 的点被多重集可区别的一般全染色的全色数及染色方案.

解　将 1、2 这两种色的 17-子集按照前文方式排成一列，并标号 1，2，…，18.

取前 4 个集合、第 9 个集合、后 4 个集合共 9 个集合依次分配给 X_3 中 9 个点.

取第 5 到第 8 个集合、第 10 个集合、第 11 到第 14 个集合共 9 个集合依次分配给 X_4 中 9 个点.

令 X_j 中每个点染以色 j，$j=1,2$. $[X_1,X_2]$中的每条边染以色 2.

X_3 中前 4 个点与 X_4 中每个点所连的边染以色 1.

X_3 中第 5 个点与 X_4 中前 4 个点所连的边染以色 1，与 X_4 中后 5 个点所连的边染以色 2.

X_3 中后 4 个点与 X_4 中每个点所连的边染以色 2.

这样，$[X_3,X_4]$中的边已染好，此时，X_3、X_4 中点对应的集合中已有 9 个元素被确定，将剩余的 8 个元素以不减顺序排列，记为$\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,8}\}$.

令颜色 $a_{i,1}$染点 $x_i^{(s)}$，颜色 $a_{i,2}$染边 $x_1^{(1)}x_i^{(s)}$，…，颜色 $a_{i,4}$染边 $x_3^{(1)}x_i^{(s)}$，颜色 $a_{i,5}$染边 $x_1^{(2)}x_i^{(s)}$，颜色 $a_{i,6}$染边 $x_2^{(2)}x_i^{(s)}$，…，颜色 $a_{i,8}$染边 $x_4^{(2)}x_i^{(s)}$，$s=3,4,i\in[1,n_s]$.

这样，图 G 中所有的点及边已染好，下面对 X_j 中点的色集合进行列举，$j=1,2$.

X_1：$\widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_2^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_3^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$

X_2：$\widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,$

$$2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},$$

$$\widetilde{C}(x_2^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},$$

$$\widetilde{C}(x_3^{(2)})=\{1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\},$$

$$\widetilde{C}(x_4^{(2)})=\{1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$$

故 $\widetilde{C}_{\mathrm{gvt}}(K_{3,4,9,9})=2$.

定理2 (i)当 $n_1=n_2<n_3<n_4$ 且 $n_3+1\leqslant n_4\leqslant\binom{n_1+n_2+n_3+2}{n_1+n_2+n_3+1}$ 时，$\widetilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=2$.

(ii) 当 $n_1=n_2<n_3<n_4$ 且 $\binom{n_1+n_2+n_3+k-1}{n_1+n_2+n_3+1}+1\leqslant n_4\leqslant\binom{n_1+n_2+n_3+k}{n_1+n_2+n_3+1}$ 时，$\widetilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=k$，$k\geqslant 3$.

(i)首先给出当 $n_1=n_2<n_3<n_4$ 且 $n_4=n_3+1$ 时图 G 使用了两种色的点被多重集可区别的一般全染色的染色方案.

设 $\boldsymbol{T}_i$ 为元素全为 i 的 $n_3\times n_i$ 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 为次对角线及其上方元素全为1，而次对角线下方元素全为2的阶为 n_3 的方阵，$\boldsymbol{N}$ 为 $n_3\times 1$ 矩阵，$i=1,2$.

令 $\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{T}_1\quad \boldsymbol{T}_2\quad \boldsymbol{A}\quad \boldsymbol{N})$，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的每一行从左到右并非是不减的，且其任意两行不同.

设 $x_i^{(4)}$ 对应的子集为 $\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,n_1+n_2+n_3+1}\}$，$i=1,2,\cdots,n_3$.

令颜色 $a_{i,1}$ 染边 $x_1^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,2}$ 染边 $x_2^{(1)}x_i^{(4)}$，…，颜色 a_{i,n_1} 染边 $x_{n_1}^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+1} 染边 $x_1^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+2} 染边 $x_2^{(2)}x_i^{(4)}$，…，颜色 a_{i,n_1+n_2} 染边 $x_{n_2}^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+n_2+1} 染边 $x_1^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+n_2+2} 染边 $x_2^{(3)}x_i^{(4)}$，…，颜色 $a_{i,n_1+n_2+n_3}$ 染边 $x_{n_3}^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,n_1+n_2+n_3+1}$ 染点 $x_i^{(4)}$.

再从1、2这两种色的 $(n_1+n_2+n_3+1)$-子集中任取一个异于 $\boldsymbol{M}$ 的行所对应的子集的子集，令子集中的元素按不减顺序排列，将这个子集分配给 $x_{n_4}^{(4)}$，并且按照上述染色方法染色.

给 X_1 中每个点染以色1，X_2、X_3 中每个点染以色2，$[X_3,X_1\cup X_2]$ 中的每条边染以色1.

给 $x_i^{(1)}x_1^{(2)}$，$x_i^{(1)}x_2^{(2)}$，$x_i^{(1)}x_3^{(2)}$，…，$x_i^{(1)}x_{n_2-2}^{(2)}$，$x_i^{(1)}x_{n_2-1}^{(2)}$，$x_i^{(1)}x_{n_2}^{(2)}$ 分别染颜色 $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n_2-i+1}$，$\underbrace{2,2,\cdots,2}_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n_1$.

这样，图 G 中所有的点及边已染好，下面说明在这种染色方案下，图 G 中各个点的色集合不同.

(1)一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

X_3 中点的色集合所含元素数目为 $n_1+n_2+n_4+1$，X_4 中点的色集合所含元素数目为 $n_1+n_2+n_3+1$，而 X_1、X_2 中点的色集合所含元素数目均为 $n_2+n_3+n_4+1$，色集合所含元素数目不同，色集合必然不同，故下面仅需考虑 X_1、X_2 中点的色集合不同.

X_1 中点的色集合含 $2n_3+n_1-i+2$ 个1，$i-1$ 个2，$i\in[1,n_1]$.

X_2 中点的色集合含 n_1+n_3-j+1 个1，n_3+j 个2，$j\in[1,n_2]$.

$\min\{2n_3+n_1-i+2\mid i=1,2,\cdots,n_1\}=2n_3+2$.

$\max\{n_1+n_3-j+1\mid j=1,2,\cdots,n_2\}=n_1+n_3$.

显然有 $2n_3+2>n_1+n_3$，故 X_1 中点的色集合中元素1的数目恒大于 X_2 中点的色集合所含元素1的数目.

故一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

(2)同一部中点的色集合互不相同.

$\widetilde{C}(x_i^{(t)})$ 中元素1的数目恒大于 $\widetilde{C}(x_j^{(t)})$ 中元素1的数目，$t\in[1,3]$，$i<j$，$i,j\in[1,n_t]$.

而 X_4 中点对应不同的 $(n_1+n_2+n_3+1)$-子集，故同一部中点的色集合互不相同.

现在对定理2中的(i)和(ii)同时考虑，当 $n_4\geqslant n_3+2$ 时，在上述染色方案的基础上，X_4 中出现了部分点及边未染色，这部分点为 $x_{n_3+2}^{(4)}$，$x_{n_3+3}^{(4)}$，…，$x_{n_4}^{(4)}$. 给这部分点对应 k 种色的 $n_1+n_2+n_3+1$-子集且异于上述已确定的 n_3+1 个子集，其中子集中的元素以不减顺序排列，用类似的方法给 $x_j^{(4)}$ 所关联的边及点进行染色，$k\geqslant 2$，$j=n_3+2,n_3+3,\cdots,n_4$.

保证给 X_j 中点的色不变，$j=1,2,3$. $[X_3,X_1\cup X_2]$、$[X_1,X_2]$ 中边的色不变.

易验证，这样的染色方案依旧是符合染色要求的，故下面仅需证明(ii)中，$k-1$ 种色无法满足要求的染色.

(ii)假设 $k-1$ 种色可以满足要求的染色，由引理1可知，$k-1$ 种色的 $(n_1+n_2+n_3+1)$-子集

共有$\binom{n_1+n_2+n_3+k-1}{n_1+n_2+n_3+1}$个.

显然有

$$\binom{n_1+n_2+n_3+k-1}{n_1+n_2+n_3+1}<\binom{n_1+n_2+n_3+k-1}{n_1+n_2+n_3+1}+1$$

故 $k-1$ 种色无法满足要求的染色.

例 3 求完全四部图 $K_{4,4,5,6}$ 的点被多重集可区别的一般全染色的全色数及染色方案.

解 给出图 G 的使用了两种色的点被多重集可区别的一般全染色的染色方案.

按照染色方案构造矩阵 $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&2&2&2&2&1&1&1&1&1&2\\ 1&1&1&1&2&2&2&2&1&1&1&1&2&2\\ 1&1&1&1&2&2&2&2&1&1&1&2&2&2\\ 1&1&1&1&2&2&2&2&1&1&2&2&2&2\\ 1&1&1&1&2&2&2&2&1&2&2&2&2&2 \end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{M}$ 的行对应的 14-子集依次对应到 X_4 中前 5 个点上.

设 $x_i^{(4)}$ 对应的子集为$\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,14}\}$,$i=1,2,\cdots,5$.

令颜色 $a_{i,1}$ 染边 $x_1^{(1)}x_i^{(4)}$,颜色 $a_{i,2}$ 染边 $x_2^{(1)}x_i^{(4)}$,$\cdots$,颜色 $a_{i,4}$ 染边 $x_4^{(1)}x_i^{(4)}$,颜色 $a_{i,5}$ 染边 $x_1^{(2)}x_i^{(4)}$,颜色 $a_{i,6}$ 染边 $x_2^{(2)}x_i^{(4)}$,$\cdots$,颜色 $a_{i,8}$ 染边 $x_4^{(2)}x_i^{(4)}$,颜色 $a_{i,9}$ 染边 $x_1^{(3)}x_i^{(4)}$,颜色 $a_{i,10}$ 染边 $x_2^{(3)}x_i^{(4)}$,$\cdots$,颜色 $a_{i,13}$染边 $x_5^{(3)}x_i^{(4)}$,颜色 $a_{i,14}$染点 $x_i^{(4)}$.

从 1、2 这两种色的 14-子集中任取一个异于上述 5 个子集的子集,并按照上述染色方法染色,这里取$\{1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$.

给 X_1 中每个点染以色 1,X_2、X_3 中每个点染以色 2,$[X_3,X_1\cup X_2]$中的每条边染以色 1.

给边 $x_1^{(1)}x_1^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_1^{(1)}x_2^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_1^{(1)}x_3^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_1^{(1)}x_4^{(2)}$ 染以色 1.

给边 $x_2^{(1)}x_1^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_2^{(1)}x_2^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_2^{(1)}x_3^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_2^{(1)}x_4^{(2)}$ 染以色 2.

给边 $x_3^{(1)}x_1^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_3^{(1)}x_2^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_3^{(1)}x_3^{(2)}$ 染以色 2,边 $x_3^{(1)}x_4^{(2)}$ 染以色 2.

给边 $x_4^{(1)}x_1^{(2)}$ 染以色 1,边 $x_4^{(1)}x_2^{(2)}$ 染以色 2,边 $x_4^{(1)}x_3^{(2)}$ 染以色 2,边 $x_4^{(1)}x_4^{(2)}$ 染以色 2.

这样,图 G 中所有的点及边已染好,下面对图 X_j 中点的色集合进行列举,$j=1,2,3$.

X_1:$\widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$,

$\widetilde{C}(x_2^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2\}$,

$\widetilde{C}(x_3^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_4^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2\}$

X_2:$\widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_2^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_3^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_4^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$

X_3:$\widetilde{C}(x_1^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_2^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_3^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_4^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2\}$,

$\widetilde{C}(x_5^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2\}$

故$\widetilde{C}_{\mathrm{gvt}}(K_{4,4,5,6})=2$.

定理 3 (i)当 $n_1<n_2<n_3<n_4$ 且 $n_3+1\leqslant n_4\leqslant\binom{n_1+n_2+n_3+2}{n_1+n_2+n_3+1}$时,$\widetilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=2$.

(ii)当 $n_1<n_2<n_3<n_4$ 且 $\binom{n_1+n_2+n_3+k-1}{n_1+n_2+n_3+1}+1\leqslant n_4\leqslant\binom{n_1+n_2+n_3+k}{n_1+n_2+n_3+1}$时,$\widetilde{\chi}_{\mathrm{gvt}}(G)=k$,$k\geqslant 3$.

(i)证明对图 G 进行点被多重集可区别的一般全染色至少需要两种色,而实际上使用两种色是可以满足要求的,具体的染色方案与下面(ii)中构造的染色方案类似,读者可参考下文.

(ii)证明 $k-1$ 种色无法满足要求的染色的方法与定理 2 中的(ii)类似,下面构造图 G 的使用了 k 种色的点被多重集可区别的一般全染色的染

色方案.

设 $\boldsymbol{A}_j$ 为阶为 n_j 的方阵，其次对角线及其上方元素全为 1，次对角线下方元素全为 2. $\boldsymbol{J}_j$ 是一个$(n_3-n_j)\times n_j$ 的元素全为 2 的矩阵，$j=1,2$. $\boldsymbol{N}$ 是一个 $n_3\times 1$ 的元素全为 2 的矩阵.

令 $\boldsymbol{T}_j=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_j\\ \boldsymbol{J}_j\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}=(\boldsymbol{T}_1\quad \boldsymbol{T}_2\quad \boldsymbol{A}_3\quad \boldsymbol{N})$.

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的每一行从左到右并非是不减的，且其任意两行不同.

将 $\boldsymbol{M}$ 的行对应的$(n_1+n_2+n_3+1)$-子集依次对应到 X_4 中前 n_3 个点，剩余的点对应 k 种色的其他$(n_1+n_2+n_3+1)$-子集，且剩余点对应的子集中的元素按不减顺序排列. 不同的点对应不同的子集.

设 $x_i^{(4)}$ 对应的子集为$\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,n_1+n_2+n_3+1}\}$，$i=1,2,\cdots,n_4$.

令颜色 $a_{i,1}$ 染边 $x_1^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,2}$ 染边 $x_2^{(1)}x_i^{(4)}$，…，颜色 a_{i,n_1} 染边 $x_{n_1}^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+1} 染边 $x_1^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+2} 染边 $x_2^{(2)}x_i^{(4)}$，…，颜色 a_{i,n_1+n_2} 染边 $x_{n_2}^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+n_2+1} 染边 $x_1^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 a_{i,n_1+n_2+2} 染边 $x_2^{(3)}x_i^{(4)}$，…，颜色 $a_{i,n_1+n_2+n_3}$ 染边 $x_{n_3}^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,n_1+n_2+n_3+1}$ 染点 $x_i^{(4)}$.

给 X_j 中的每个点染以色 j，$j=1,2,3$. 给$[X_2,X_3]$、$[X_1,X_2\cup X_3]$中的每条边染以色 1.

这样，图 G 中所有的点及边已染完，下面说明图 G 中点的色集合不同.

(1)一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

由于不同部中点的色集合所含元素数目不同，故一旦两个点属于不同的部，那么这两个点的色集合不同.

(2)同一部中点的色集合互不相同.

$\widetilde{C}(x_i^{(t)})$中元素 1 的数目恒大于$\widetilde{C}(x_j^{(t)})$中元素 1 的数目，$t\in[1,3]$，$i<j$，$i,j\in[1,n_t]$

X_4 中点对应不同的$(n_1+n_2+n_3+1)$-子集，故同一部中点的色集合互不相同.

例 4　求完全四部图 $K_{3,4,5,7}$ 的点被多重集可区别的一般全染色的全色数及染色方案.

解　给出图 G 的使用了两种色的点被多重集可区别的一般全染色的染色方案.

根据染色方案构造矩阵 $\boldsymbol{M}$.

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&2\\1&1&2&1&1&1&2&1&1&1&1&2&2\\1&2&2&1&1&2&2&1&1&1&2&2&2\\2&2&2&1&2&2&2&1&1&2&2&2&2\\2&2&2&2&2&2&2&1&2&2&2&2&2\end{pmatrix}$$

将 $\boldsymbol{M}$ 的行对应的 13-子集依次对应到 X_4 中前 5 个点上.

这里，给 $x_6^{(4)}$ 对应$\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\}$，给 $x_7^{(4)}$ 对应$\{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2\}$.

设 $x_i^{(4)}$ 对应的子集为$\{a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,13}\}$，$i=1,2,\cdots,7$.

令颜色 $a_{i,1}$ 染边 $x_1^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,2}$ 染边 $x_2^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,3}$ 染边 $x_3^{(1)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,4}$ 染边 $x_1^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,5}$ 染边 $x_2^{(2)}x_i^{(4)}$，…，颜色 $a_{i,7}$ 染边 $x_4^{(2)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,8}$ 染边 $x_1^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,9}$ 染边 $x_2^{(3)}x_i^{(4)}$，…，颜色 $a_{i,12}$ 染边 $x_5^{(3)}x_i^{(4)}$，颜色 $a_{i,13}$ 染点 $x_i^{(4)}$.

给 X_j 中的每个点染以色 j，$j=1,2,3$. 给$[X_2,X_3]$、$[X_1,X_2\cup X_3]$中的每条边染以色 1.

这样，图 G 中所有的点及边已染完，下面对 X_j 中点的色集合进行列举，$j=1,2,3$.

X_1：$\widetilde{C}(x_1^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_2^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_3^{(1)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2\}$

X_2：$\widetilde{C}(x_1^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_2^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_3^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_4^{(2)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2\}$

X_3：$\widetilde{C}(x_1^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2\}$，

$\widetilde{C}(x_2^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_3^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2\}$，

$\widetilde{C}(x_4^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2\}$，

$$\widetilde{C}(x_5^{(3)})=\{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2\}$$

故$\widetilde{C}_{\mathrm{gvt}}(K_{3,4,5,7})=2$.

3 结 语

本文中解决了部分完全四部图的点被多重集可区别的一般全染色问题.重难点在于染色方案的给出,得到的结果还是极具规律性的.目前,关于完全四部图的点被多重集可区别的一般全染色的其他情况已经有了相应的结果,未全部展示.而关于更复杂的完全五部图的相应情况正在考虑中.

参考文献:

[1] HARARY F, PLANTHOLT M. The point-distinguishing chromatic index [M]// HARARY F, MAYBE J S. **Graphs and Application**. New York: Wiley Interscience, 1985: 147-162.

[2] LIU Chanjuan, ZHU Enqiang. General vertex-distinguishing total coloring of graphs [J]. **Journal of Applied Mathematics**, 2014, **2014**: 849748.

[3] 陈祥恩,苏 丽,王治文. 完全二部图$K_{2,n}$和$K_{3,n}$的一般点可区别全染色 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, **54**(6): 1289-1293.
CHEN Xiang'en, SU Li, WANG Zhiwen. General vertex-distinguishing total colorings of complete bipartite graphs $K_{2,n}$ and $K_{3,n}$ [J]. **Journal of Jilin University (Science Edition)**, 2016, **54**(6): 1289-1293. (in Chinese)

[4] 陈祥恩,马静静. $K_{4,4,p}$的点可区别的IE-全染色($p\geqslant 1\,008$) [J]. 电子与信息学报, 2020, **42**(12): 3068-3073.
CHEN Xiang'en, MA Jingjing. Vertex-distinguishing IE-total coloring of $K_{4,4,p}$ ($p\geqslant 1\,008$) [J]. **Journal of Electronics and Information Technology**, 2020, **42**(12): 3068-3073. (in Chinese)

[5] 陈祥恩,王勇军. 完全二部图的点被多重集可区别的IE-全染色及一般全染色 [J]. 吉林大学学报(理学版), 2022, **60**(4): 838-844.
CHEN Xiang'en, WANG Yongjun. IE-total coloring and general total coloring of complete bipartite graph which are vertex-distinguished by multiple sets [J]. **Journal of Jilin University (Science Edition)**, 2022, **60**(4): 838-844. (in Chinese)

[6] 邵嘉裕. 组合数学 [M]. 上海: 同济大学出版社, 1991.
SHAO Jiayu. **Combinatorial Mathematics** [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1991. (in Chinese)

General total colorings of K_{n_1,n_2,n_3,n_4} with vertex distinguished by multisets ($n_1\leqslant n_2<n_3\leqslant n_4$)

WANG Yongjun, CHEN Xiang'en

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A general total coloring of graph G is a distribution of all vertices and edges of graph G using several elements. Usually, during coloring, the k colors used are denoted by 1, 2, …, k, and there is a size relationship between the colors represented by the numbers. A general total coloring of graph G using k colors is called k-general total coloring of graph G. By using the method of contradiction, the method of constructing concrete coloring and the method of distributing the color sets in advance, the general total colorings are discussed for complete 4-partite graph K_{n_1,n_2,n_3,n_4} ($n_1\leqslant n_2<n_3\leqslant n_4$) which are vertex-distinguished by multisets. The scheme of the corresponding optimal coloring is given and the chromatic numbers of the corresponding colorings are obtained.

Key words: complete 4-partite graph; general total coloring; multisets; color set; distinguishing